Theoria - Revista Eletrônica de Filosofia
Faculdade Católica de Pouso Alegre

UMA INTRODUÇÃO HISTÓRICO-FILOSÓFICA AOS NÚMEROS COMPLEXOS

AN HISTORICAL AND PHILOSOPHICAL INTRODUCTION ON COMPLEX NUMBERS

William de Siqueira Piauí[1]

RESUMO:
Nosso objetivo é tecer considerações introdutórias e gerais de um ponto de vista histórico-filosófico quanto à construção do conceito "número-complexo". Dito de outro modo, consideraremos a descoberta da "incomensurabilidade" ou "desproporcionalidade" entre a diagonal e os lados do quadrado, daí o surgimento de considerações filosóficas das noções de unidade, magnitude e número; a tentativa de solução de equações cúbicas, compreensão da irredutibilidade de algumas delas e o surgimento do termo "raiz imaginária", um quase-número, um impossível; por fim, chegamos à ampla utilização das "raízes imaginárias" que precede aquela poderosa ampliação da noção de número e construção dos números complexos (a qual só mencionaremos a título de conclusão), ratificada no plano Argand-Gauss e justificada ainda uma vez por Hamilton, o qual pode ser considerado o criador-construtor desse novo conceito de número.
Palavras-chave: Aristóteles, Euclides, Cardano, Leibniz, Euler

ABSTRACT:
We intend to make introductory and general considerations of an historical-philosophical point of view on the construction of the concept of the "complex-number". In other words, we will consider the discovery of the incommensurability or disproportionality between the diagonal and the sides of the square, and then the emergence of further philosophical considerations of the notions of unity, magnitude and number; the attempt of solution of cubic equations, of understanding of the irreducibility of some of them and the emergence of the term "imaginary root", a quasi-number, an impossible. Finally, come to the wide use of "imaginary roots" that precedes that powerful extension of the notion of number and construction of complex numbers (and what we will mention only as conclusion).
Keywords: Plato, Aristotle, Euclid, Cardano, Leibniz, Euler.

Todo aquele que precisou estudar o tema "números complexos" encontrou um material bibliográfico considerável; é verdade que muitos e excelentes trabalhos existem sobre tal tema e assuntos com ele relacionados; contudo, e também para além dos muitos trabalhos sobre inesperadas aplicações dos números complexos, existem ainda muitas abordagens a serem exploradas, especialmente depois das muitas mudanças ocorridas na historiografia e filosofia das ciências em geral e da matemática em particular, ambas atualmente em pleno desenvolvimento no Brasil. Como exemplo destas mudanças e da intensificação de tais pesquisas, podemos citar o livro **História da matemática: uma visão**

[1] Doutor em Filosofia pelo Dep. de Filosofia da Universidade de São Paulo (FFLCH – USP), licenciado em matemática pelo IME – USP/Unit – SE e professor adjunto da Universidade Federal de Sergipe (UFS).

crítica, desfazendo mitos e lendas, de Tatiana Roque, e o livro **Filosofias da matemática**, de Jairo José da Silva; os quais, no mínimo, fazem o pano de fundo da intenção geral do nosso trabalho. Seja como for, a opinião geral defendida nesses livros justifica a pertinência de muitas investigações introdutórias como a nossa, ou seja, da produção de mais um trabalho introdutório sobre as origens dos números complexos e sobre muitos outros assuntos, mas de um ponto de vista mais histórico-filosófico. Se nos expressarmos em termos da obra **O irracional** do francês Gilles-Gaston Granger, podemos dizer que há ainda muito que esmiuçar quanto à "dialética interna dos conceitos matemáticos" (GRANGER, 2002, p.56). É o que esclareceremos um pouco no próximo parágrafo.

Quem frequentou algum curso de Análise e teve contato (ao menos deveria ter tido) com o excelente livro de Elon Lages Lima intitulado **Curso de análise**, se deparou, já em seu início (na verdade no capítulo II), com a seguinte afirmação: "Não interessa o que os números são; (isto seria mais um problema filosófico) o que interessa é como eles se comportam" (LIMA, 1976, p. 25). Para um livro que tratará dos conceitos de enumerabilidade, corpo e topologia da reta, problemas fundamentais para uma compreensão mínima do que separa os vários e distintos conjuntos de números, aquela afirmação soa como uma advertência à impertinência da apresentação de problemas filosóficos – como os associados à natureza ou existência dos números –, ou mesmo históricos – por quais desenvolvimentos de fato passaram determinados conceitos matemáticos, por exemplo –, em livros técnicos de matemática. Em geral, é similar o que ocorre com os livros, mesmo que introdutórios, sobre o tema Números Complexos ou Variáveis Complexas. Mesmo que esses livros venham recebendo cada vez mais notas históricas, ainda há muito o que problematizar, especialmente, e para dizer pouco, quanto às filosofias que se associavam à conceituação da natureza dos objetos matemáticos ou quanto às implicações filosóficas dos desenvolvimentos por que passou a linguagem lógico-matemática.

Ou seja, ainda há muito o que dizer se, ao falar da história da matemática, mantivermos perguntas tais como as formuladas por Jairo José: "O que estuda a matemática?", "O que são, afinal, os números?", "Que tipo de objeto é um objeto abstrato da matemática?" (SILVA, 2007, 14). Às quais devem ser acrescentadas caracterizações, não só históricas, mas também filosóficas associadas a períodos, conceitos ou filósofos determinados. Junte-se a isso o fato que só muito recentemente o fazer matemático deixa de se confundir com a atividade filosófica. De qualquer modo, também vale a advertência feita por Ian Stewart: "Embora a matemática não seja somente, nem sequer prioritariamente, acerca de números, [nela] estes têm um papel fundamental" (STEWART, 1996, p. 46). Só muito recentemente, pois, esses objetos fundamentais da matemática "parecem" ter deixado de oferecer problematização filosófica.

Por isso mesmo, temos, já de saída, de esclarecer que nosso objetivo é muito distinto do daqueles livros técnicos sobre números complexos. Aqui, trata-se de considerações gerais associadas à filosofia e à história do problema do nascimento dos números complexos; ou seja, nosso texto nem de longe têm as pretensões técnicas dos sobre Números ou Variáveis Complexas. Nosso objetivo é duplamente distinto daqueles, pretendemos oferecer considerações introdutórias e gerais de um ponto de vista histórico-filosófico quanto ao que precedeu a criação do conceito "número-complexo". Introdutórias e gerais por que sua história é longa e exigiria uma vasta explanação de muitos detalhes técnicos do ponto de vista lógico-matemático, e mesmo do ponto de vista histórico-filosófico, já que teríamos de cobrir desde a Filosofia Antiga até a Contemporânea, desde seu surgimento e as várias recusas que sofreu, até terminar com Hamilton "construindo" e legitimando o conceito de "número complexo".

Assim, e para circunscrevermos ainda mais nossos objetivos, é preciso dizer que uma história longa e filosofias complexas sempre cercaram o que se tornariam os "números complexos"; um dos mais recentes e, certamente, mais importantes desenvolvimentos do conceito de número que o Ocidente Moderno produziu. Em termos de blocos mais importantes, parece que os historiadores da Matemática ou das filosofias da Matemática concordariam com os seguintes desenvolvimentos: I) descoberta da incomensurabilidade ou desproporcionalidade entre a diagonal e os lados do quadrado, daí o surgimento de considerações ainda mais filosóficas sobre as noções de unidade, magnitude e número; II) a utilização da revolucionária notação indo-arábica dos números, a qual já incluía os números negativos e o zero, a tentativa de solução de equações cúbicas, compreensão da irredutibilidade de algumas delas e o surgimento do termo "raiz imaginária", um quase-número, uma quantidade impossível; III), por fim, chegamos à ampla utilização das "raízes imaginárias" que precede aquela – que só mencionaremos a título de conclusão – poderosa ampliação da noção de número e da construção dos números complexos, ratificada no plano Argand-Gauss e justificada ainda uma vez por Hamilton, que pode ser considerado o criador-construtor desse novo conceito de número.

1. Unidade, Número e Magnitudes Incomensuráveis (irracionalidade)

Desde seu surgimento, a Filosofia Ocidental esteve associada às Matemáticas; não seria falso dizer que foi em grande medida por isso mesmo que Tales de Mileto (625-546 a.C.) foi considerado o seu primeiro filósofo, supostamente o primeiro a formular teoremas; e, do mesmo modo, podemos afirmar que Euclides (século IV-III a.C.) foi um dos mais importantes filósofos de todos os tempos. Claro que, em seu nascimento, a discussão sobre quais exatamente eram as fronteiras entre tais disciplinas não tinha muito sentido, especialmente porque a segunda também passa a ser algo completamente nova justamente quando nasce a primeira. Podemos dizer, pois, que ambas surgiram e se desenvolveram muito aproximadamente. Conjecturaríamos que certo ramo da filosofia foi se especializando, desde lá, até se tornar o que hoje chamaríamos de Filosofia da Matemática ou da Lógica.

Voltando àquele início, se a descoberta da incomensurabilidade (assimetria) ou falta de proporcionalidade (sem analogia) – ou melhor, um *alogos* ou *irrationalis* – entre os lados do quadrado e sua diagonal, portanto na *Physis*, levou ou não à morte o pitagórico Hipaso de Metaponto (séc. V) é certo, todavia, que ela evidenciou um dos primeiros grandes obstáculos filosóficos do então inevitável progresso da Matemática[2]. Sua superação marca o primeiro grande passo para a posterior superação do obstáculo, também filosófico, das *raízes imaginárias* – uma *quantitas impossibilis* (quantidade impossível)[3]. Nessa primeira parte, pois, nosso objetivo é oferecer considerações introdutórias e gerais de um ponto de vista histórico-filosófico quanto à tomada de consciência do surgimento das linhas, seguimentos ou magnitudes incomensuráveis, tentando mostrar que tal surgimento esteve associado a considerações filosóficas com respeito às noções de unidade, magnitude e número.

---

[2] Evidentemente, estamos considerando que o obstáculo contribuiu em muito para o avanço das Matemáticas.

[3] Com isso, pretendemos deixar claro o que queríamos dizer em nosso artigo "Leibniz e Descartes: labirintos e análise" (p. 150) e corrigir o que dissemos no "Matemática e Metafísica em Leibniz: o cálculo diferencial e integral e o processo psíquico-metafísico da percepção" (p. 12). No primeiro faltou dizer "faz lembrar a maneira pitagórica de tratar as hipóteses, nome que tem sua origem na busca das hipotenusas, o que resultou no conhecido teorema de Pitágoras, **no qual** a consideração da raiz é de fundamental importância, **o que se associará ao problema das raízes imaginárias**". No segundo, a afirmação "Fica claro também porque Leibniz fez lembrar, a fim de esclarecer sua concepção do cálculo infinitesimal, as raízes imaginárias, isto é, a aplicação do cálculo, fazendo uso do triângulo característico, se assemelha a aplicação do teorema de Pitágoras" não está muito correta, na verdade a lembrança das raízes imaginárias se dá graças ao problema que tal quantidade tem o mesmo estatuto das quantidades infinitesimais, ambas são ficções úteis (em outras notas apresentaremos as afirmações de Leibniz que corroboram tal correção); além disso, teríamos, no mínimo, de acrescentar a idéia que depois da incomensurabilidade presente na noção pitagórica de raiz (anacronicamente falando) assistimos ao surgimento das raízes de números negativos e o triângulo característico teria um estatuto semelhante ao de tal quantidade ou grandeza. Em grande medida são também estes os temas do presente artigo.

Mitos e lendas à parte, como diria Tatiane Roque, muitos são os historiadores que supõem o surgimento e a compreensão adequada daquela *alogia* como a primeira exigência de ampliação do conceito de número. Pois, como nos lembra Granger (2002, p. 29), era um traço característico da matemática pitagórica a oposição entre par e ímpar, e seriam esses os limites iniciais do conceito de número; ou seja, naquele início, só existiam os números pares ou ímpares; além disso, quaisquer tipos de relações entre eles deveriam ter como resultado um número par ou ímpar. Como pretendemos indicar, e para sermos mais precisos, talvez o melhor seja começar pensando em ampliação do conceito de relação comensurável ou proporcional entre segmentos, linhas, retas, depois entre magnitudes e, daí, números.

Muitas são as maneiras de documentar tal suposição; se nos mantemos no registro dos textos filosóficos mais conhecidos, é exatamente assim que é caracterizado o problema no **Menon** de Platão (427-347 a.C.). Como sabemos, tudo começa com uma série de perguntas feitas por Sócrates[4] ao Escravo (82 a); o objetivo era dar mais força à tese da reminiscência. O Escravo é levado justamente à aporia[5] (83 a) segundo a qual a superfície procurada não pode ter como lados nem a linha (γραμμη – traço) que é de dois pés (um segmento par), nem a que é de quatro pés (também um segmento par); mas, o que é mais surpreendente, nem mesmo a linha que fica entre ambas (83 d), a de três pés (um segmento ímpar), pode resultar em uma área que é o dobro de quatro pés (resultado do quadrado de lado 2). Aqui fica evidente a exigência de ampliação do conceito de unidade de segmento; ou seja, para sair da aporia é necessário que o Escravo admita que tal resultado só pode ser alcançado se for utilizado como unidade padrão *algo* que, com relação às unidades envolvidas, não pode ser dito nem par nem ímpar, portanto, de magnitude incomensurável com ambos ou sem proporção com ambos. A saída é tomar uma unidade a partir da figura cujos lados são as linhas de dois pés, que se mostra como dando origem à superfície cuja área é quatro pés.

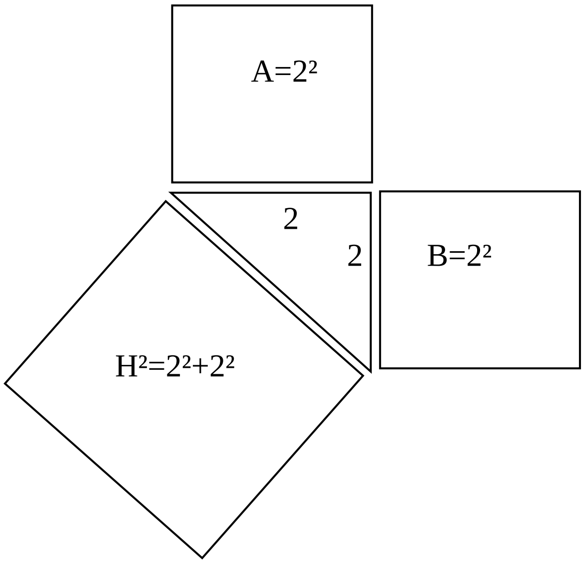
Em termos da proposição 47 do livro I dos **Elementos** (2009, p. 132) de Euclides, isso significa o mesmo que tomar “o lado que se estende sob o ângulo reto” de um triângulo retângulo “cujos lados (πλευρά) que contêm o ângulo reto” medem 2 pés. Em termos do

[4] Trata-se de personagem que lembra o famoso filósofo grego Sócrates (469-399 a.C.), conhecido como o pai da maiêutica e que, depois de um julgamento público (no qual foi acusado, dentre outras, de impiedade para com os deuses e de corromper os jovens), teria sido condenado a tomar sicuta. Apesar de sua enorme influência, não deixou nenhuma obra escrita. Quanto ao **Menon**, estamos utilizando a tradução feita por Maura Iglésias; cf. referências bibliográficas.

[5] O termo *απορειν*, que aparece em 84 a, lembra não-passagem, impedimento, o contrário de poros. Sócrates era famoso por levar seus interlocutores ao embaraço, talvez daí as tantas vezes que Platão o pinte desse modo. Aqui se trata de uma aporia temporária, mas que exigirá uma ampliação da noção de quantidade de segmento (do traço) para além do par e da ímpar.

diálogo, trata-se de tomar a *diagonal* do quadrado de lado 2 e torná-la lado de um novo quadrado; ou seja, partindo do teorema de Pitágoras, sabemos que $H^2=2^2+2^2$ (daí, na notação atual: $h = \sqrt[2]{2^2+2^2}$)[6]; assim, H passa a ser o segmento procurado.

No diálogo, grande parte da significação do *objeto H* só se resolve por conta de o Escravo poder mostrar (traçar-apontar) a linha, o segmento H suposto, a partir do quadrado de lado 2, aquilo que hoje chamaríamos de "raiz de oito ($\sqrt{8}$)". Somente em 85 b Sócrates menciona o nome geral utilizado pelos sofistas[7] para significar tal "unidade": a diagonal (διάμετρος). Portanto, é preciso recorrer a outro tipo de segmento, o "diâmetro"; no caso em questão, o diâmetro do quadrado de lado 2, um segmento que nem é par nem ímpar. Em termos dos **Elementos**, teríamos algo como[8]:



Para além dos perigos de anacronismos associados à utilização da notação atual, ou mesmo de uma álgebra não existente naquela época, evidentemente, ali o problema não parece ser tratado a partir de uma junção clara entre Aritmética e Geometria; na verdade, a solução do problema parece manter as unidades primeiras como segmentos. Em termos geométricos, portanto, o que fica evidenciado no diálogo é que não há porque perguntar pela

[6] É justamente esse teorema que Euclides demonstra na proposição 47. No decorrer do presente texto, manteremos os índices mesmo das raízes, já que isso parece esclarecer certas denominações dos números e das operações que serão mencionadas.

[7] Segundo a nota 26 da tradução de Iglésias, o termo sofista lembra apenas o mestre, no caso o professor de Geometria; cf. PLATÃO, **Menon**, p. 63. De qualquer modo, os sofistas deram origem à importante escola filosófica da Grécia, seus mais célebres representantes foram Górgias (c. 487-c. 380 a.C.) e Protágoras (séc. V); daí que uma das teses principais a lembrar tal escola seja a "O homem é a medida de todas as coisas, da existência dos existentes e da não existência dos não existentes" Denis HUISMAN, **Dicionário dos Filósofos**, p. 807, que parece ter sido afirmada pelo segundo.

[8] Vale lembrar que o caso apresentado na proposição 47 dos **Elementos** é mais geral que o discutido no **Menon**, tendo em vista que se aplica a A e B distintos.

realidade manifesta, evidentemente, de tal unidade; ela é mostrada se estendendo “de canto a canto” (85 b) o diâmetro traçado do quadrado de superfície de 4 pés. Todavia, dizer que número é esse, ou seja, dar a resposta em termos aritméticos, é que pode parecer um problema mais agudo e que exigiria mais filosofia, já que nem se trataria de um número par nem de um número ímpar.

Geralmente é a partir de tal reflexão que se busca compreender a prova por absurdo (GRANGER, 2002, p. 39) da incomensurabilidade ou não proporcionalidade da diagonal com relação a um quadrado de lados pares ou ímpares. O que importa lembrar aqui é que tal problema foi revisitado muitas outras vezes e se associava a uma formulação filosófica geral que, a partir da **Carta 7ª** (342 a) de Platão, segundo Thomas Heath (1981, p. 288), marcará o próprio nascimento da Filosofia da Matemática[9]. Para não nos envolvermos com a questão da autenticidade deste texto, podemos lembrar a formulação que Aristóteles faz na obra **Metafísica** (livro III, ou Beta, 996a 15) do seguinte modo: “há também a seguinte questão: se os números (αριθμοι), as linhas (μηκη), as figuras (σξηματα) e os pontos (στιγμαι) são substâncias (ουσιαι) ou não e, caso sejam substâncias, se são separadas das coisas sensíveis (αισθητων) ou imanentes a elas.” (ARISTÓTELES, 2005, p. 89).

No que dizia respeito a algo que poderia ser chamado de Filosofia da Matemática grega, as perguntas filosóficas mais básicas e gerais se referiam, portanto, à natureza e substancialidade de objetos matemáticos, tais como números, linhas, figuras e pontos e exigiam a forma “definição” para sua resposta[10]. Nesse sentido, portanto, os **Elementos** de Euclides representam também uma tentativa filosófica de responder a tais questões[11]. E justamente a tentativa de responder a essas perguntas mais básicas também parece ter determinado o significado e o limite que poderia alcançar aquela incomensurabilidade.

Em primeiro lugar, é sabido que Aristóteles costumava separar os gêneros de investigação, assim, Geometria e Aritmética não investigavam o mesmo gênero de ser (ARISTÓTELES, 2005 [**Metafísica**, 1078 a], p. 601), o que parece exigir formulações distintas da incomensurabilidade ou falta de proporcionalidade quanto a linhas e a números;

---

[9] Discutimos esta questão no início de nosso artigo “Querela da realidade dos objetos lógico-matemáticos: uma introdução à filosofia moderna”; cf. referências bibliográficas.

[10] Tratamos amplamente da utilização filosófica do recurso discursivo “definição” em nossa dissertação de mestrado, cujo título era “Espécies individuais e princípio de individuação na filosofia de Leibniz” (USP, 2002); valeria a pena dar uma olhada em todo seu capítulo II.

[11] Diríamos que é justamente a essas questões que estão destinadas as definições iniciais dos livros I e VII. Segundo Proclos (410-485), os **Elementos** tinham como temática o Cosmos; na verdade, eles representavam “uma tentativa de resolver sistematicamente os problemas principais da cosmologia de Platão”; cf. William PIAUÍ, “Leibniz e a metafísica da nova geometria: espaço como relação”, p. 84.

ou seja, a formulação de tal *alogia* em termos numéricos deve utilizar elementos próprios. É o que tenta nos mostrar Granger (2002, p. 36) ao nos remeter à proposição 2 do livro X dos **Elementos**, quando pretendemos nos mover no registro dos números. Na tradução de Irineu Bicudo, temos: “Caso sendo subtraída, de duas magnitudes (μεγεθων) [expostas] desiguais, sempre por sua vez a menor da maior, a qual é deixada nunca meça exatamente a antes de si mesma, as magnitudes serão incomensuráveis (ασυμμετρα)”. (EUCLIDES, 2009, p. 355). Trata-se de apresentar a incomensurabilidade (assimetria) entre magnitudes e, apesar de não aparecer aqui o termo número (αριθμος), é verdade que desde o livro VII os números passam a ser problematizados nos **Elementos**. Na obra euclidiana, o conjunto destes objetos havia sido definido da seguinte maneira:

> 1. Unidade (μονας) é aquilo segundo o qual cada uma das coisas existentes (των οντων) é dita uma. 2. E número (αριθμος) é a quantidade composta de unidades (το εκ μοναδων συγκειμενον). (...) 5. E o maior é um múltiplo (καταμετρηται) do menor, quando seja medido exatamente pelo menor. (...) 6. Um número par (αρτιος) é o que é dividido em dois. 7. Um número ímpar (περισσος) é o que (...) difere de um número par por uma unidade. (...) 12. Um número primo (πρωτοι) é o medido por uma unidade só. (...) 21. Números estão em proporção (αναλογον), quando sejam o primeiro do segundo e o terceiro do quarto o mesmo múltiplo ou a mesma parte ou as mesmas partes. (Idem, p. 269-70).

É fácil verificar que o problema da ligação do número com o existente (τα οντα) – na passagem da **Metafísica** que citamos mais acima, coisa sensível – e com a unidade (μονας) é a exigência primeira de qualquer composição numérica posterior. É preciso lembrar aqui Aristóteles, para quem:

> É evidente que o Um (εν) significa (σημαινει) uma medida (μετρον). (...) E a unidade de medida é sempre indivisível (αδιαιρετον), seja em relação à forma (ειδος) seja em relação à sensação (αισθησιν). Portanto, o um não é uma realidade em si (οντος) e uma substância (ουσιας). E com razão: o um (εν) significa a medida de uma multiplicidade (μετρον πληθους), e o número (αριθμος) significa a medida de uma multiplicidade, e o número significa uma multiplicidade numerada e uma multiplicidade de medida. Portanto, acertadamente não se considera o um como número, porque o um e a medida são princípios (αρξη). (ARISTÓTELES, 2005 [**Metafísica**, 1088 a], p. 661-3).

Em segundo lugar, e para além do fato que a Filosofia Ocidental nasce também como aquela que deve investigar os verdadeiros princípios. Eis a resposta do Estagirita para a pergunta que lembramos mais acima: os números não são realidades em si mesmas (οντος) e nem têm substância (ουσιας), evidentemente, também não precisam existir no mundo das idéias. Os números significam a medida de uma multiplicidade numerada e de medida, que se referem, obviamente, a alguma unidade. Nesse sentido, e resolvendo aquele problema mais agudo, poderíamos dizer que a incomensurabilidade da diagonal se associa a uma multiplicidade distinta das medidas dos lados que a originam; tais segmentos ou números são de natureza (multiplicidade) distinta.

Para além de afirmar uma ligação mais determinante entre unidade e número, aquela passagem dos **Elementos** parece querer dizer que os números ou magnitudes associadas aos lados, segmentos ou linhas, que compõem o quadrado e sua diagonal não são proporcionais (análogos), no sentido que não podemos encontrar um múltiplo que meça ambos (como se pode fazer a partir do teorema de Tales)[12], e são incomensuráveis, tendo em vista que a subtração das magnitudes desiguais (lados e diagonal) sempre gera um resto distinto do anterior, nesse último caso associada a uma "má *antifairese*" (ROQUE, 2012, p. 130).

Parece ser este, portanto, o novo conceito de "número" alcançado a partir das noções de falta de proporcionalidade e incomensurabilidade. Vale notar que a ele não é conferido o mesmo estatuto dos números pares, dos ímpares, dos primos e mesmo dos planos, sólidos, quadrados, cúbicos e perfeitos (que são mencionados no livro VII dos **Elementos**); o que também parece sustentar a tese de Tatiana Roque (2012, p. 131) quanto à forte separação grega entre o universo das grandezas e o universo dos números.

De qualquer modo, se aceitarmos a opinião de Granger (2002, p. 38) – com mais algumas outras referências de época, além do **Menon** –, a última afirmação dos **Elementos** feita acima seria suficiente para sustentar a demonstração da incomensurabilidade da diagonal e do quadrado apresentada na proposição 117 do livro X, que gera a prova por absurdo a partir do par e do ímpar; mesmo que para o próprio Granger se trate de uma interpolação[13]. A opinião de Granger fica ainda mais forte se lembramos também a proposição 9 da mesma parte da obra, a saber:

> Os quadrados sobre as retas (μηκει) comensuráveis (συμμετρων) em comprimento têm entre si uma razão (λογον) que um número quadrado (τετραγωνος αριθμος), para um número quadrado; e os quadrados que têm entre si uma razão que um número quadrado, para um número quadrado, também terão os lados comensuráveis em comprimento. E os quadrados sobre as retas incomensuráveis (ασυμμετρων) em comprimento não têm entre si uma razão (λογον ουκ εξει) que um número quadrado; e os quadrados que não têm entre si uma razão que um número quadrado,

[12] Referimo-nos à expressão, já citada, "21. Números estão em proporção (αναλογον), quando sejam o primeiro do segundo e o terceiro do quarto o mesmo múltiplo ou a mesma parte ou as mesmas partes"; que se refere ao que costumamos chamar de regra de três. Vale lembrar que nas **Regras para a orientação do espírito** e no **Discurso do método** ela será considerada como o tipo mais importante de raciocínio e, talvez por isso mesmo, René Descartes tenha feito um amplo uso dela em sua **Geometria**.
[13] O termo interpolação se refere à adição de uma proposição que certamente não havia sido escrita por Euclides. Na tradução de Irineu Bicudo, que temos utilizado, tal interpolação sequer é mencionada.

> para um número quadrado, nem terão os lados comensuráveis em comprimentos. (EUCLIDES, 2009, p. 361).

Mesmo que existam retas incomensuráveis em comprimento que não acabem em uma razão que é um número quadrado (e cremos que se trata de caso semelhante ao lembrado no **Menon**, já que lá não podemos dizer que número é H), existe, entretanto, uma razão (λογος) que ao menos permitiria passar da comensurabilidade ou incomensurabilidade de retas (μηκος) que geram áreas para a comensurabilidade ou incomensurabilidade de números quadrados (τετραγωνος αριθμος), ou seja, "podemos doravante comparar relações de grandezas com relações de números, e a incomensurabilidade das grandezas se reduz a uma incomensurabilidade de números". (GRANGER, 2002, p. 47). O que em termos de comensurabilidade já estava garantido desde a proposição 5 do mesmo livro X, a saber: "As magnitudes comensuráveis têm entre si uma [mesma] razão que um número para um número (Τα συμμετρα μεγεθη προς αλληλα λογον εξει ον αριτμος προς αριθμον)" (EUCLIDES, 2009, p. 358). De qualquer modo, no caso em questão, ela não pode mais ser pensada apenas em termos de par e ímpar, de inteiros pura e simplesmente; e nos parece que a expressão "os quadrados sobre as retas incomensuráveis em comprimento não têm entre si uma razão" é prova disto.

Com efeito, muitos são os motivos para sustentar a forte separação da Geometria e da Aritmética entre os gregos, parte da divisão entre os gêneros de ser da filosofia aristotélica seria um bom motivo para tanto, mas também é verdade que já em Euclides encontramos uma suficiente caracterização da incomensurabilidade em termos de número, ou seja, algo que nos permitiria falar em exigência de ampliação ao menos dos significados do conceito de número, o que justificaria a menção de uma possível criação de um novo gênero de número. É verdade que, como mostramos, com Euclides temos já outros além dos pares e ímpares, e poderíamos falar de fortes contornos de um número irracional no sentido de ser raiz.

Por fim, para aquém dos impedimentos supostamente criados por um Eudoxo (408- c. 355 a.C.) para o desenvolvimento da aritmética ou logística, se nos detemos mais nas filosofias que faziam seu pano de fundo, o que de fato parece ter se tornado um impedimento para a criação de fato de um conceito que lembre algo como números *raiz* (*radice*) particulares, algo semelhante ao resultado do *levar* o quadrado para o outro lado da igualdade, foi certamente a associação entre a noção de número e coisa (ente, coisa sensível, segmento, linha etc.) ou número e unidade. Será preciso, portanto, sair do Ocidente para que ocorra ao menos parte dessa dissociação.

2. Equações Cúbicas, Irredutibilidade e as Raízes Imaginárias

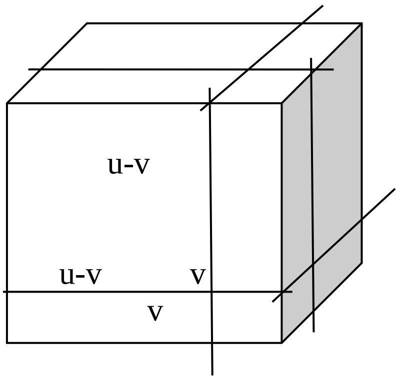
Como a maioria dos livros de História da Filosofia e da Matemática atestam, o centro de reflexão sobre a Filosofia e a Matemática mudará para o Oriente próximo, especialmente Bagdá, mais ou menos no século VIII. Diante do problema que escolhemos tratar, desde então nomes como o de um Boécio (475-524) um Beda (c. 673-735), Alcuino (735-804) e mesmo Gerbert (950-1003) devem ceder lugar aos de um Al-Khwarizmi (c. 825), de um Tabit ibn Qorra (826-901), Abu-Kamil (c. 900), Abu'l-Wefa (940-998), Omar Khayam (1050-1123), Nasir Ed-din (c. 1250), dentre outros.

O fato é que, com a chegada de textos dos matemáticos árabes, e mesmo de suas traduções dos textos gregos, uma nova filosofia dos números também se estabeleceu, em grande medida sem o tempo de tomada de consciência necessária. A noção indo-arábico de número, por exemplo, de imediato enfraquece a idéia de que os números devem necessariamente estar associados a coisas, estabelecidos o número zero e os negativos. Talvez não se tenha examinado com a devida atenção a revolução que essa mudança traz. Além disso, nó século XIV já se verifica a utilização do termo italiano *radice* no sentido em que mencionamos no final da parte anterior e depois das defesas do uso da notação indo-arábica e do sistema posicional feitas, por exemplo, no famoso **Liber abaci** do italiano Leonardo Fibonacci (c. 1175-1250). Contudo, é certo dizer que somente "no final do século XV começam a surgir indícios de um uso mais consciente" de toda uma nova "notação simbólica" (ROQUE, 2012, p. 266). A partir do que o obstáculo passará a se associar ao surgimento de outro conceito, o de raízes de números negativos; marcando sua falta de sentido, os *numeri ficti* de Cardano (1501-1576) ou *racines imaginaires* de Descartes (1596-1650).

Em geral os livros costumavam colocar o problema do surgimento das raízes imaginárias a partir somente do problema algébrico da solução de determinadas equações de terceiro grau; em parte isso é verdade, mas uma contextualização mais adequada acaba por revelar detalhes importantes da Filosofia da Matemática que está se constituindo e que cremos ter seu ponto alto na concepção geral de Matemática defendida na Lógica de Port Royal; uma "nova lógica" associada à recusa da dependência da álgebra ou aritmética para com a geometria, bem como à recusa da lógica aristotélica. Desde pelo menos o século XV, temos uma crescente confiança nos métodos algébricos e o abandono da necessidade das demonstrações geométricas; Leibniz (1646-1716), por exemplo, chegou a afirmar que: "não são as figuras que fornecem a prova entre os geômetras", a "força da demonstração independe da figura traçada, que só existe para facilitar a inteligência do que se quer dizer e fixar a atenção" (Apud PIAUÍ, 2002, 138).

Nesse sentido, se prestamos atenção à argumentação desenvolvida por Tatiana Roque, a maioria dos livros de História da Matemática seguiu rápido demais quando tratou desse período histórico e se esqueceu que para um Tartaglia (c. 1499-1557) ou um Cardano o "papel da geometria na demonstração" ainda era o de "justificar o método algébrico"; inclusive essa é parte importante das disputas da época. É interessante notar que, desse ponto de vista, os livros de Tatiana Roque e de Gilles-Gaston Granger se completam; isto é, enquanto um mostra os detalhes geométricos da solução de Cardano (ROQUE, 2012, p. 271), espécie de origens do problema geral das raízes imaginárias, o outro fornece a interpretação geométrica da associação pensada por Leibniz e Johannes Bernoulli (1667-1748) entre as raízes de números negativos e os logaritmos, o que faz a passagem do nosso problema não só para a álgebra, mas também para a análise nascente, e será o ponto de partida para Euler (1707-1783) associar o problema à trigonometria (GRANGER, 2002, 65).

Assim, é em sua obra **Ars magna** (A grande arte) de 1545 que o matemático italiano Girolamo Cardano oferece solução para treze tipos de equações cúbicas. Nesse sentido, ele faz parte de uma série que, em termos de novidade com relação aos trabalhos árabes, como que termina em Rafael Bombelli, mas começa com Luca Pacioli (c. 1445-1509) – que teria afirmado que o problema de cerca de 3 mil anos "cubo coisas igual a número" não tinha solução –, seguido de Scipione Del Ferro (1465-1526) que aceita o desafio afirmando o contrário, depois Nicolo Fontana de Brescia, mais conhecido como Tartaglia – que inclusive parece ter sido enganado por Cardano, que teria prometido não divulgar sua solução do problema, mas que o faz no **A grande arte**. Em termos geométricos, temos o caso geral da igualdade "$(u-v+v)^3=(u-v)^3+3(u-v)^2v+3(u-v)v^2+v^3$" (ROQUE, 2012, p. 272), e que vai assumindo distintas particularidades; teríamos algo como:



Na nossa notação, uma equação cúbica do tipo $x^3+px=q$ (*cubo coisas igual a número*) pode ser escrita em termos de valores de *a* e *b*; observando-se a identidade $(a-b)^3+3ab(a-b)=a^3-b^3$. Se assumimos $p=3ab$ e $q=a^3-b^3$, chegamos a $x=a-b$, o que significa que é possível encontrar o valor de x se temos os valores "a" e "b". Fazendo-se, por exemplo, $a=p/3b$ e $q=a^3-b^3$, obtemos a equação $(3b^2)^3+q(3b)^3=p^3$, que pode ser resolvida para "b" utilizando-se uma equação quadrática. Se resolvemos o sistema para "a" e "b", temos:

$a^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt[2]{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ e $b^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt[2]{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$. Daí que:

$$x = a + b = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt[2]{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt[2]{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

logo, $x=a+b$ é, conforme a equação acima, uma raiz da equação $x^3+px+q=0$.

Se prestarmos atenção a estas fórmulas, fica claro que as raízes quadradas negativas surgem quando "$(q/2)^2+(p/3)^3$" é negativo. Mas mesmo nesse caso era possível encontrar a solução de alguns tipos de equação, em geral quando se fazia $x=a-b$; como na equação, tantas vezes repetida, $x^3=15x+4$, daí $x^3-15x-4=0$; a partir da qual obtemos:

$$x = a + b = \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} + \sqrt[2]{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} - \sqrt[2]{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3}\right)^3}}\text{; daí}$$

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt[2]{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt[2]{-121}}$$

Em 1572, Rafael Bombelli publica sua obra **L'Algebra**, onde seu principal objetivo parece ter sido o de esclarecer o livro de Cardano. Quando chegou a esse "tópico espinhoso" (STEWART, 2013, p. 104), simplesmente ultrapassou o horror às raízes de número negativo e procedeu conforme as regras conhecidas da álgebra, que mostravam que: $\left(2 \pm \sqrt[2]{-1}\right)^3 = 2 \pm \sqrt[2]{-121}$. Daí $\sqrt[3]{2 + \sqrt[2]{-121}} = \sqrt[3]{(2 + \sqrt[2]{-12})^3} = 2 + \sqrt[2]{-1}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt[2]{-121}} = \sqrt[3]{(2 - \sqrt[2]{-12})^3} = 2 - \sqrt[2]{-1}$. Logo, $\left(2 + \sqrt[2]{-1}\right) + \left(2 - \sqrt[2]{-1}\right) = 2 + 2 + \sqrt[2]{-1} - \sqrt[2]{-1} = 4$. Encontrada uma das raízes – no caso, 4 –, chegamos à equação: x^2+4x+1[14], a partir da qual facilmente chegamos às outras duas raízes: $-2 + \sqrt[2]{3}$ e $-2 - \sqrt[2]{3}$.

[14] O método geralmente utilizado para tal redução é o algoritmo ou regra de Briot-Ruffini ou Ruffini-Honner, nomes que lembram os esforços do italiano Paolo Ruffini (1765-1822), do inglês William George Horner (1786-1837) e do francês Charles Auguste Briot (1817-1882) para solucionar equações de grau maior que 3.

Como deve ter ficado claro, em geral o método de solução das equações cúbicas significava reduzi-las a uma equação quadrática, o que nem sempre era possível e, quando não, se chegava a uma "equação irredutível" (ROQUE, 2012, p. 431) à qual Bombelli dedicou considerável tempo de estudo. Evidentemente, muitos problemas matemáticos acabavam por envolver esse tipo de quantidade e é verdade que o emprego de números negativos e de suas raízes ainda inquietará os matemáticos, mesmo depois do século XVII (ROQUE, 2012, p. 432).

3. Ampliando a utilização das raízes Imaginárias

Muitos problemas matemáticos acabavam por envolver aquele tipo de quantidade. Em pleno século XVII, um caso que vale a pena mencionar é o do filósofo francês Descartes: já em um de seus primeiros problemas de sua **La Géométrie** (de 1637), bem antes da equação $x^3 - 6xx + 13x - 10 = 0$ do livro III, surge a expressão algébrica $z = \frac{a}{2} + \sqrt[2]{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (b)^2}$ da qual o francês simplesmente ignora o caso em que "$(a/2)^2+b^2$" seja negativo. Esses e muitos outros casos Descartes englobará na expressão "raízes imaginárias", ou como ele mesmo afirmava no livro III de sua **Geometria**: "tanto as verdadeiras quanto as falsas", as negativas, "não são sempre reais", "mas algumas [são] somente imaginárias"; quer dizer, nem sempre há uma "quantidade que corresponde àquelas que se imagina"[15].

Tratava-se justamente de operar com a suposta quantidade "raiz de número negativo", para a qual o suíço Johannes Bernoulli, em um texto de 1712, dará o nome de *quantitas impossibilis* (Apud GRANGER, 2002, p. 62). Também o inglês Newton – com sua visão realista materialista da Matemática[16] – chegou a recusá-la como uma quantidade carente de significação, as *radices impossibilis* (NEWTON, 1779 [**Arithmetica universalis**], p. 173), e quanto às quais o filósofo alemão Leibniz advertia que, apesar de não se tratar de "verdadeiros números", no cálculo elas podem "ser introduzidas utilmente e com segurança"

[15] Retiramos essas expressões do famoso texto de Descartes que, no todo, afirma: "*Au reste, tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires, c'est-à-dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celles qu'on imagine ; comme encore qu'on en puisse imaginer trois en celle-ci,* $x^3 - 6xx + 13x - 10 = 0$*, il n'y en a toutefois qu'une réelle qui est 2, et pour les deux autres, quoiqu'on les augmente ou diminue, ou multiplie en la façon que je viens d'expliquer, on ne saurait les rendre autres qu'imaginaires"* René DESCATES, **Geometria** [livro III], p. 174. Fica claro, de saída, que o francês recusa as outras raízes da equação cúbica como sendo "somente imaginárias", não reais.

[16] Para mais detalhes, cf. nosso artigo "Querela da realidade dos objetos lógico-matemáticos: uma introdução à filosofia moderna".

(GRANGER, 2002, p. 59); muito semelhantemente, portanto, ao que ele havia afirmado quanto às quantidades infinitesimais[17].

A hostilidade com relação às raízes imaginarias deu origem a muitas expressões: *menos que nada, número fictício, raiz impossível, quantidades imaginárias, anfíbio entre o ser e o não ser* etc. Certamente a permanência da expressão *raízes imaginárias*, como quer Tatiana Roque, se deve à ampla divulgação da obra cartesiana (2012, p. 409). Na verdade, se pensarmos que a *alogia* dos gregos havia sido encontrada na Natureza, já que surge primeiro relacionada a segmentos (geometria-física), uma das primeiras e mais amistosas afirmações quanto a tal quantidade foi a seguinte:

> Mas, para dizer a verdade, a Natureza, mãe das diversidades eternas, ou melhor, a Razão Divina, é muito zelosa da diversidade das coisas, da sua beleza, para permitir que de um único gênero (*genus*) tenham se formado todas as coisas. Assim, por aquele milagre da Análise, ela descobre essa elegante e admirável saída, prodígio do mundo das ideias, objeto quase Anfíbio entre o Ser e o não-Ser, o qual denominamos raízes imaginárias (*radicem imaginariam*). (Apud PIAUÍ, 2002, p. 149).

Essa afirmação, feita por Leibniz em um texto de 1702, foi muitas vezes mal compreendida, especialmente se tomamos uma parte menor do texto, como o faz Ian Stewart em seu **17 equações que mudaram o mundo** (2013, p. 105). A "eloqüência dessa declaração" se associava, primeiro, a uma concepção mais clara que a newtoniana ou cartesiana – em muito devedoras de uma geometria física – da noção de número, bem como da idealidade das unidades da geometria e da aritmética; como fica evidente, dentre muitas outras, na carta endereçada ao matemático Dangicourt (1664-1727)[18], onde era afirmado que:

> Os todos intelectuais não têm partes, a não ser em potência. Assim, a linha reta não tem partes atuais, exceto na medida em que ela seja atualmente subdivida ao infinito (...). É como a unidade na Aritmética, que é também um todo intelectual ou ideal divisível em partes; como em frações, por exemplo, não atualmente em si (de outro modo, ela seria redutível a partes mínimas que jamais se encontram em números), mas na medida em que tiver frações determinadas. (...) considerada como *numerus maximus*, *omnia* é uma coisa contraditória, assim [como *nihilum* considerado] como

[17] "O cálculo infinitesimal é útil quando se trata de aplicar a matemática à física, ainda que eu não pretenda empregá-lo para dar conta da natureza das coisas. Pois considero as quantidades infinitesimais como ficções úteis". Apud William PIAUÍ "Leibniz e Descartes: Labirintos e Análise", p. 146. Cf. também o final do nosso artigo "Matemática e Metafísica em Leibniz: O cálculo diferencial e Integral e o processo psiquico-metafísico da percepção". Vale lembrar, além disso, que para Leibniz "esses todos infinitos [como o espaço absoluto], bem como os seus opostos infinitamente pequenos [como os átomos], são de atualidade apenas nos cálculos geométricos, da mesma forma que as raízes imaginárias da álgebra" G. W. LEIBNIZ, **Novos ensaios** [livro II, cap. XVII, § 3], p. 110.

[18] Vale lembrar que na presente carta Leibniz enfrenta as supostas incoerências da série associada ao nome do italiano Luigi Guido Grandi (1671-1742), muitas vezes lembrado na correspondência do alemão com Johann Bernoulli.

> *numerus minimus.* As duas extremidades *nihil* & *omnia* estão fora dos números, [ou seja, são] *extremitates exclusae non inclusae.* (LEIBNIZ, 2012, p. 174-8).

Segundo, a uma noção muito clara quanto à importância de se pensar a notação. Para corroborar tal afirmação, basta que prestemos atenção à diferença de opinião, por exemplo, quando se trata da suposta falta de importância de considerar as *cifras* defendida nas **Regras para a orientação do espírito** (regra IV) de Descartes, com a seguinte afirmação feita por Leibniz:

> Uma vez formada, a linguagem (*langage*) serve também ao homem para raciocinar (*raisonner*) por si mesmo, seja pelo fato de que as palavras (*les mots*) lhe permitem lembrar-se dos pensamentos abstratos, seja pela utilidade que encontramos, ao raciocinar, em servir-nos de caracteres (*caractères*)[19] e pensamentos surdos (*pensées sourdes*)". LEIBNIZ, 1984 [**Novos ensaios**, III, I], p. 212).

Primeiramente, é preciso atentar para o fato que o sentido do termo *mots*, diferentemente de *parole* – que estava mais associado a som articulado –, resgata as muitas expressões utilizadas no ambiente da Matemática e que eram um misto de palavras, letras, números etc., como no caso da expressão utilizada, dentre outros, por Cardano *cub p; 6 res æqlis 20* e que significava *cubo e seis coisas iguais a 20*, que depois se transformará no nosso $x^3+6x=20$ (ROQUE, 2012, p. 270). Bem ao sabor dos preceitos e reflexões da Lógica de Port Royal[20]; toda essa nova compreensão da importância da notação, do uso adequado dos caracteres, que inclusive fará de Leibniz um dos pais da Lógica Moderna, certamente se associou à compreensão da utilidade das unidades infinitesimais e das raízes imaginárias; mesmo porque a própria afirmação que fizemos mais acima garante a estas últimas um estatuto de gênero de quantidade que deve fazer parte de uma descrição da verdadeira complexidade e beleza da natureza.

Por fim, aquela afirmação direciona o problema para o ambiente da Análise, uma disciplina que estava muito rapidamente ganhando terreno, e não só da Álgebra ou Aritmética.

[19] Já em um texto de 1679 (segundo Marc Parmentier) que foi de conhecimento de Christian Huygens (1629-1695), Leibniz diferenciava um *Methodus per meros characteres* e um *Methodus per verba* (palavras). Quanto ao segundo, ele afirmava que "*Habet etiam hoc incommodi methodus per verba vulgaria, quod connexiones tansitus et consequentiae variis ambiguitatibus laborent. (...) Sed si haberetur lingua philosophica, in ea omnes commoditates omnium characterum unitae* (O incômodo do método por palavras [da linguagem] vulgar é que nele operam várias ambiguidades nas conexões, transições e consequências. (...) Mas se possuíssemos uma língua filosófica, ela reuniria todas as vantagens do [uso] dos caracteres)" W. G. LEIBNIZ, **La caractéristique geómétrique**, p. 48. Certamente tal língua filosófica seria o que hoje chamaríamos de uma lógica matemática. De qualquer modo, em Leibniz já podemos falar de plena consciência dos perigos de confiar na intuição geométrica.

[20] E vale lembrar que Leibniz trocou uma vasta correspondência com Antoine Arnauld (1612-1694), teólogo jansenista que escreveu junto com Pierre Nicole (1625-1695) a **La logique ou L'art de penser** (Lógica de Port-Royal) e a **Grammaire générale et raisonnée** (Gramática de Port-Royal); Arnauld foi considerado o Euclides do século XVII.

Nesse caso, podemos lembrar o descontentamento de Leibniz com relação aos avanços alcançados por François Viète (1540-1603) e Descartes quanto ao que ele considerava uma Análise Geométrica[21] de fato acabada; bem como suas várias tentativas de escrever um tratado sobre Análise Infinitesimal[22], o que se associou à sua famosa disputa com Newton quanto a quem teria criado primeiro o cálculo.

De qualquer modo, a disciplina Análise definirá a ampla investigação dos fundamentos das criações matemáticas elaboradas pelo Ocidente Moderno que, de uma só vez, suplantarão árabes e gregos. Isso tudo revela, ao contrário do que pensa Stewart, uma visão muito clara da sua utilidade e do como deveriam ser interpretadas as raízes imaginárias por parte do filósofo alemão. Mesmo que ainda não implique uma ampliação do número que justifique falar em criação dos números complexos. Assim, tal afirmação devia ser colocada em outro contexto para que fosse melhor compreendida.

Leibniz trocou uma vasta correspondência com os suíços Jacob (1654-1705), Johann (já mencionado) e Nicolaus (1687-1759) Bernoulli; ela figurava no volume III da coletânea de textos sobre matemática, os **Mathematische Schriften**[23]. A partir dessa obra, pode-se notar que a maior parte da correspondência, 275 cartas, é trocada com Johann Bernoulli e versa sobre diversas questões matemáticas. Esta parte da correspondência tem início na p. 133 (precedida de uma introdução que começa na p. 111) e termina na p. 973. É claro que precisaríamos de muito mais do que podemos dizer em um artigo para tratar das várias questões ali tratadas, mas queríamos localizar os documentos mencionados por Granger e que se referem às cartas de número 228 (CCXXVIII, p. 882), de 16 de março de 1712, e 246 (CCXLVI, p. 915), de 29 de julho de 1713, onde Leibniz e Johann, "a propósito da ordem relativa dos números positivos e negativos" que acaba por se relacionar com a discussão se o log(-1) é ou não igual a 0 (GRANGER, 2002, p. 59), tratam da relação entre as raízes ou, agora também, razões imaginárias (*rationes imaginarias*) e os logaritmos de números negativos. Este enfrentamento dará origem àquilo que o alemão chamará de *Doutrina sobre a impossibilidade dos logaritmos de números negativos* (*doctrinae de impossibilitate*

[21] Cf. G. W. LEIBNIZ, **La caractéristique geómétrique**, p. 50. Tal descontentamento, que conduziu Leibniz à *Analysis situs* (parte da origem de nossa Topologia), se associava à exigência de redução, melhora e demonstração dos princípios e dos axiomas de Euclides (Idem, p. 51, nota 1), exigências muito semelhantes às que levaram David Hilbert (1862-1943) aos seus **Grundlagen der Geometrie** (Fundamentos da geometria); o que lembra mais uma vez que aquela língua filosófica se pareceria com uma lógica matemática.

[22] Cf. "*Remarques de Mr. Leibniz sur l'art. V. des Nouvelles de la republique de lettres du mois de fevrier 1706*"; **Mathematische Schriften** [V], p. 389-392.

[23] As obras completas do alemão que estão sendo elaboradas pelo Leibniz-Archivs (Hanôver) certamente trarão novidades quanto ao todo dessa correspondência, todavia, como ainda não pudemos acessar o novo volume em que ela constaria, mantemo-nos utilizando aquela coletânea.

logarithmorum numeris negativis, idem, p. 912). No espírito desta doutrina, Leibniz concluirá que:

> De fato [log(-1)] não é positivo, pois tal é o logaritmo de todo número positivo maior que a unidade. Entretanto, também não é negativo, posto que tal é o logaritmo de todo número positivo menor que a unidade. Portanto, aquele logaritmo de -1 nem é positivo nem negativo, segue-se que não é verdadeiro [real], mas imaginário. **Consequentemente, também a razão, à qual ele corresponde, não é verdadeira, mas imaginária**. Eu provaria algo semelhante a isto da seguinte maneira: Se assumíssemos verdadeiramente aquele logaritmo de - 1, isto é, de razão -1 para 1, a metade deste mesmo logaritmo seria o próprio $\sqrt{-1}$, mas $\sqrt{-1}$ é a quantidade imaginária. Assim, chegaríamos a um absurdo se assumíssemos aquele logaritmo da quantidade imaginária. (Grifo nosso).[24]

Após a adoção do sistema indo-arábico de numeração, dizer que uma quantidade nem correspondia a um número positivo nem a um número negativo só podia significar que não se tratava de algo real, mas de uma impossibilidade; útil, certamente, mas imaginária. Contudo, aquelas razões, relações ou proporções, semelhantes às lembradas por Arnauld, Leibniz denominará razões imaginárias (*rationes imaginarias*), uma clara ampliação do significado e utilização das raízes imaginárias. De qualquer modo, seria preciso adotar outro sistema ou plano para que aquela impossibilidade adquirisse de fato outro estatuto.

Somados, portanto, ao texto "*Observatio quod rationes sive proportiones non habeant locum circa quantitates nihilo minores et de vero sensu methodi infinitesimalis*", do volume V dos **Mathematische Schriften** (p. 387-9)**,** de onde retiramos a citação acima, são estes os documentos que Granger dispõe com o objetivo de deixar claro que o filósofo alemão tinha uma visão mais equilibrada da utilidade e da necessária ampliação da noção de *raízes (razões) imaginárias*.

Tais textos e controvérsias são documentos que deixam explícito as possibilidades que o início do século XVIII vai abrir para a utilização e compreensão das raízes imaginárias e que acabam sendo verdadeiros sinais do nascimento dos números complexos.

---

[24] "*Non enim est positivus, nam talis omnis est Logarithmus numeri positivi unitate majoris. Sed tamen etiam non est negativus, quia talis omnis est Logarithmus numeri positivi unitate minoris. Ergo Logarithimus ipsius -1 cum nec positivus sit nec negativus, superest ut sit non verus, sed imaginarius. Itaque et ratio, cui respondet, non vera, sed imaginaria est. Idem etiam sic probo: Si daretur verus Logarithmus ipsius – 1, seu rationis -1 ad 1, ejus logarithmi dimidium foret Logarithmus ipsius* $\sqrt{-1}$ *, sed* $\sqrt{-1}$ *est quantitas imaginaria. Itaque daretur Logarithmus verus imaginariae quantitas est absurdum*" G. W. LEIBNIZ, **Mathematische Schriften** [V], p. 388. Leibniz começa esse texto mencionando a obra **Noveaux élémens de géométrie** (ou ***Elementa nova geometriae***, Novos elementos de geometria, parece que de 1677) de Antoine Arnauld. Na qual havia sido afirmada a falta de sentido da proporção 1:-1=-1:1, cf. Gilles-Gaston GRANGER, **O irracional**, p. 59, ao que Leibniz assente dizendo tratar-se de um "*certissimo argumento*" tal qual o do logaritmo do número -1.

Considerações Finais

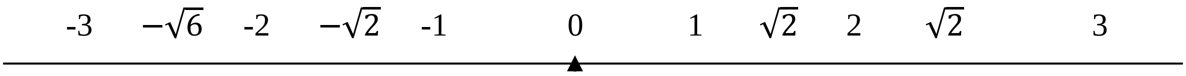
De qualquer modo, foi justamente a visão de Leibniz que influenciou um dos desenvolvimentos mais importantes porque passou aquela quantidade; ou seja, a associação entre as raízes ou razões imaginárias e os logaritmos fornece o ponto de partida do também suíço Leonard Euler (1707-1800). A discussão se o log(-1) é ou não igual a 0 ou se pode ser resolvido a partir de uma razão imaginária, para além de atestar que "o sentimento do Sr. Leibniz tinha mais fundamento" que o do Sr. Johann Bernoulli, exigia uma ampliação também da noção de logaritmo. A discussão tinha uma fonte comum, vinha de uma "ideia pouco justa", segundo a qual a cada logaritmo corresponde um único número (GRANGER, 2002, p. 64). Afastada tal idéia,

> ...se apresentarmos $x = (1+u)^n$, com u infinitamente pequeno e n infinitamente grande, teremos log*x*=*nu*. Mas temos $u = \sqrt[u]{x-1}$ e portanto $logx = n(\sqrt[u]{x-1})$, onde a raiz enésima, se n=∞, em virtude da teoria das equações algébricas, tem uma infinidade de valores e, por conseguinte o logaritmo... Euler calcula então log -1 como assumindo não um único valor imaginário, segundo a intuição de Leibniz, mas a infinidade de valores imaginários $(2k-1)\,\pi\sqrt[2]{-1}$. Com k inteiro ou nulo. Ele apresenta e resolve o problema geral de determinar todos os valores que correspondem ao logaritmo de um número positivo ou negativo qualquer, de uma "quantidade imaginária". (Idem).

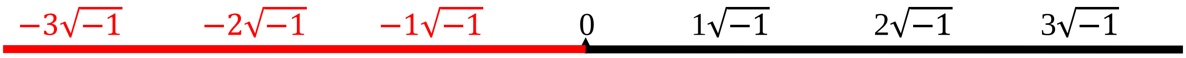
Foi precisamente a partir desse ponto de partida – lembrando também, segundo Granger (Idem, p. 65), D'Alembert (1717-1783) e De Moivre (1667-1754) –, que depois Euler "introduz paralelamente a forma trigonométrica $r\,e^{i\theta}$", que dará origem, como sabemos, à equação que leva o nome do suíço, ou seja, $e^{i\theta} + 1 = 0$; considerada, muito justamente, "o padrão de ouro para a beleza matemática" (CREASE, 2011, p. 80).

Como podemos notar, ambas já se valem da unidade imaginária "i", ou seja, da tão achincalhada raiz do número negativo um. De qualquer modo, imediatamente associadas à $e^{i\pi} = cos\pi + isen\pi = -1$, a partir da qual já podemos falar de ampla aceitação operatória das raízes e razões imaginárias, também da ampla utilização da unidade imaginária ($\sqrt{-1}$) bem como do surgimento do par *unidade complexa* ($R + \sqrt{-1}\,X$). A partir de então, as considerações geométricas se complicariam muito, mas não estamos mais em tempos de submissão da Álgebra à Geometria.

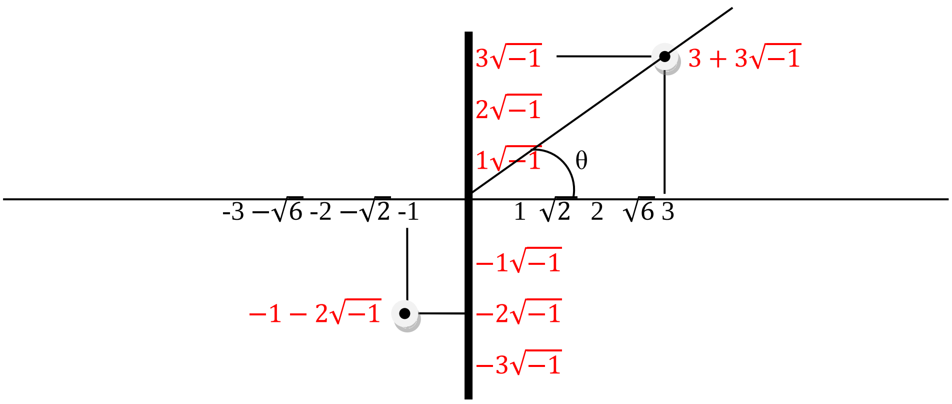
Se voltarmos um pouco e, deixando de lado os textos, organizarmos todo aquele *refugo*, aqueles *pseudo-números* teríamos algo como o seguinte. Em primeiro lugar, quantidades reais (não imaginárias) que podem de fato ser associadas a números, naquele sentido números reais, algo como:



Em segundo lugar, teríamos as quantidades imaginárias (não reais) que gerariam pseudo-números que poderia ser ordenados da seguinte ordem:



Claro que, se os pseudos-números referentes à associação de um número positivo com uma raiz de um número negativo (parte preta da linha) eram imaginários no sentido de absurdos, ainda mais absurdo seria pensar em raízes de número negativos associadas a um número também negativo (parte vermelha da linha). Trata-se de uma ordenação que organiza unidimensionalmente pseudo-números de possíveis quantidades imaginárias. O que será feito depois de Euler, já com Caspar Wessel (1745-1818), Jean Robert Argand (1768-1822) e Carl Friederich Gauss (1777-1855) é transformar essas possibilidades em ordenada de um plano, algo como:



É claro que, associadas desse modo, as quantidades reais e imaginárias ampliam em muito o que se pensava serem os números, ou seja, enquanto aqueles números reais eram pensados como infinitos unidimensionalmente (para mais e para menos) agora os pseudo-números também devem ser pensados infinitamente, mas, associados com aqueles (as unidades complexas), levam o infinito para a bidimensionalidade. Não foi à toa que o irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865) ficou obsedado pelo que se poderia pensar a partir de tal ampliação; de fato, mesmo hoje estamos longe de explorar todas as conseqüências dela.

Por fim e voltando a Euler, A ligação das raízes imaginárias com as funções trigonométricas abrirá um campo totalmente novo da Matemática e o par *unidade complexa* passará a ser amplamente utilizado. Entretanto, segundo o próprio Granger, nem mesmo com Euler as raízes imaginárias passam a ser interpretadas como verdadeiros números (Idem). Teremos de esperar mais um pouco para que a criação dos "números" complexos, associados pois a um sistema de numeração mais amplo que o indo-arábico, seja ratificada no plano Argand-Gauss e justificada ainda uma vez por Hamilton, que pode ser considerado o criador-construtor desse novo conceito de número.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARISTÓTELES. **Metafísica** (bilíngue). Trad. Giovanni Reale (do grego para o italiano), Marcelo Perine (do italiano para o português). São Paulo: Ed. Loyola, 2005.

ARNAULD, Antoine. **Noveaux élémens de géométrie**. Haye: H. van Bulderen, 1690.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Ed. Blucher, 1999.

CREASE, Robert P. **As grandes equações: a história das fórmulas matemáticas mais importantes e os cientistas que as criaram**. Trad. Alexandre Cherman. Rio de Janeiro: Ed. Zahar, 2011.

DESCARTES, René. **The geometry** (bilíngue). Trad. David Eugene Smith e Marcia L. Latham (para o inlgês). Nova York, Dover, ?.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Ed. Unicamp, 2004.

EUCLIDES. **Os elementos**. Trad. Irineu Bicudo. São Paulo: Unesp, 2009.

_________. **Elements of geometry**. Estabelecido por J. L. Heiberg; trad. Richard Fitzpatrick. Leipzig: Teubner, 2008.

GRANGER, Giles Gaston. **O irracional**. Trad. Álvaro Lorencini. São Paulo: Ed. Unesp, 2002.

HEATH, Thomas L. A. **History of Greeks Mathematics**. Nova York: Dover, 1981.

HUISMAN, Denis. **Dicionário de Filósofos**. Trad. Carla Berliner et. al. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm. "Carta de Leibniz ao matemático Dangicourt: sobre as mônadas e o cálculo infinitesimal". Trad. William de Siqueira Piauí e Juliana Cecci Silva. *In*: **Theoria – Revista eletrônica de Filosofia**. Pouso Alegre, v. 4, n. 10, 2012, p. 174-179.

_________. “Carta de Leibniz a Des Bosses (Sobre as almas, as enteléquias, as mônadas, a massa e o espaço)”. Trad. William de Siqueira Piauí e Juliana Cecci Silva. *In*: **Theoria – Revista eletrônica de Filosofia**. Pouso Alegre, v. 5, n. 12, 2013, p. 133-140.

_________. **La caractéristique geómétrique**. Trad. Marc Parmentier. Paris: J. Vrin, 1995.

_________. **Mathematische Schriften**. Hildesheim: Olms, 1971.

_________. **Novos ensaios sobre o entendimento humano**. Trad. Luiz João Baraúna. São Paulo: Abril Cultural, 1984.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise** (V. 1). Rio de Janeiro: Ed. LTC e Sociedade Brasileira de Matemática, 1976.

_________. **Meu professor de matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: Ed. SBM, 2004.

NEWTON, Isaac. **Operum newtoni** (Tomo Primus – que inclui a **Arithmetica universalis**). Londres:?, 1779.

PIAUÍ, William de Siqueira. **Espécies individuais e princípio de individuação na filosofia de Leibniz**. São Paulo, Dissertação de Mestrado, USP, 2002.

_________. “Querela da realidade dos objetos lógico-matemáticos: *uma introdução à filosofia moderna”*. No prelo.

_________. “Leibniz e a metafísica da nova geometria: espaço como relação”. **Cadernos UFS de Filosofia**. Aracaju, v. 9, 2011, pp. 77-94.

_________. “Leibniz e as duas faces do labirinto do contínuo: uma introdução”. **Argumentos revista de Filosofia**. Fortaleza, 2010, v. 03, p. 16-24.

_________. “Leibniz e Descartes: Labirintos e Análise”. **Cadernos espinosanos**. São Paulo, v. 09, 2002, p. 123-69.

_________. “Matemática e Metafísica em Leibniz: O cálculo diferencial e Integral e o processo psiquico-metafísico da percepção”. **Theoria – Revista eletrônica de Filosofia**. Pouso Alegre, v. 05, 2010, p. 1-16.

PLATÃO. **Menon**. Trad. Maura Iglésias. Rio de Janeiro: PUC – Rio; São Paulo: Loyola, 2001.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Ed. Zahar, 2012.

SILVA, José Jairo da. **Filosofias da matemática**. São Paulo: Ed. Unesp, 2007.

STEWART, Ian. **17 equações que mudaram o mundo**. Trad. George Schlesingerl. Rio de Janeiro: Ed. Zahar, 2013.

_________. **Os problemas da matemática**. Trad. Miguel Urbano. Lisboa: Ed. Gradiva, 1996.

_________. **Uma história da simetria na matemática**. Trad. Cláudia Carina. Rio de Janeiro: Ed. Zahar, 2012.