TRADUÇÃO

Carta de Leibniz ao matemático Dangicourt[1]
Sobre as mônadas e o cálculo infinitesimal

Tradução e Notas:
Juliana Cecci Silva[2]
William de Siqueira Piauí[3]

I. Fico muito contente que um espírito tão matemático quanto o teu também se dedique a investigações filosóficas. Isso contribuirá com o meu projeto de tornar a filosofia demonstrativa. Parece-me que nossas opiniões não estão tão distantes uma da outra. Também sou da opinião que, falando de modo adequado, não existe qualquer substância extensa. É por isso que chamo a matéria de *non substantiam sed substantiatam*[4]. Disse em algumas

[1] Texto extraído de G. W. LEIBNIZ, **Opera omnia**. Ed. Ludovicus Dutens. Tournes: Genebra, 1768, Tomo III, pp. 499-502. Parte dessa carta também se encontra em G. W. LEIBNIZ, **Discours de Métaphysique, Monadologie et autres textes**. França: Gallimard, 2004 (pp. 378-380). O francês Pierre Dangicourt (1664-1727) se tornou membro da Academia de Berlim ao fugir da perseguição aos protestantes na França e graças ao seu importante estudo sobre matemática transcendente; essa carta é um dos últimos textos filosóficos de Leibniz e foi redigida dois meses antes de sua morte, que se deu em 14 de novembro de 1716. Trata-se de um enfrentamento com relação ao que se pensava da matéria, ou seja, de sua oposição à filosofia cartesiana da *substância extensa* (*res extensa)* e especialmente ao realismo matemático que associaria os infinitésimos a entidades físicas últimas, os átomos de Demócrito, portanto, também uma oposição explícita à filosofia newtoniana da matemática e da física. Depois de fornecer parte do fio de Ariadne para aqueles que se perdem no labirinto do *continuum* (§ I), Leibniz tenta mostrar (a partir do § II) a pertinência de suas concepções quanto ao conceito de número e ao cálculo dos infinitésimos, mostrando que elas fornecem a solução do *enigma* (§ IV) que teria se tornado motivo de disputa entre, dentre outros, os matemáticos italianos Guido Grandi e Alessandro Marchetti, uma disputa que envolverá a *series* que ficou conhecida pelo nome do primeiro e que demandou um grande volume de respostas que se estenderam até pelo menos o final do século XIX, quando praticamente termina a reestruturação das bases do Cálculo Diferencial e Integral, o que inclui a problematização do conceito de número e da noção de limite, depois do que muitas das *filosofias do infinito* deixam de interferir no desenvolvimento das matemáticas. Para esta segunda parte da argumentação, conferir nosso artigo: *Leibniz e as duas faces do labirinto do contínuo*, **Argumentos: revista de filosofia**, n. 13, pp. 16-24.

[2] Tradutora, bacharel em Letras (Português e Francês) pela Universidade de São Paulo (USP). Mestranda em Estudos de Tradução pela Universidade de Brasília (UnB).

[3] Doutor em Filosofia pela Universidade de São Paulo (USP). Professor da Universidade Federal de Sergipe (UFS).

[4] Para Leibniz a matéria não é *substancia, mas substanciada*, isto é, a matéria atualmente dividida ao infinito está na dependência de uma infinidade de substâncias; os motivos desta dependência e os princípios que regulam a relação entre a matéria e as substâncias são problematizados em sua obra **Monadologia**, a qual está servindo de pano de fundo para essa primeira parte de sua argumentação. Um bom resumo de sua argumentação também

passagens (talvez da **Teodiceia**, se não me engano) que a matéria não é senão um fenômeno regrado e exato que de modo nenhum engana, quando ficamos atentos às regras abstratas da razão[5]. As verdadeiras substâncias são apenas as substâncias simples, ou aquilo que denomino *Mônadas*. E creio que só existem mônadas na natureza, o resto sendo apenas os fenômenos que dela resultam. Cada mônada é um espelho do universo segundo seu ponto de vista, acompanhada de uma multiplicidade (*multitude*) de outras mônadas que compõe seu corpo orgânico da qual ela é a mônada dominante. E nela mesma só existem percepções e tendências a novas percepções e apetites; como no universo dos fenômenos não há senão figuras e movimentos. Então, a mônada envolve previamente (*par avance*) em si mesma seus estados passados e futuros, de modo que um *onisciente* os pode ler, e as mônadas entram em acordo entre si sendo espelhos de um mesmo universo, mas diferentemente representado: é como uma multiplicação de um mesmo universo ao infinito, embora o próprio Universo seja de uma difusão infinita. É nisso que consiste minha Harmonia preestabelecida. As mônadas (as que conhecemos são chamadas de almas) mudam o estado de si mesmas conforme as leis das causas finais e dos apetites, mas o reino das causas finais entra em acordo com o reino das causas eficientes, que é aquele dos fenômenos. No entanto, eu jamais diria que o *continuum* é composto de pontos geométricos, pois a matéria não é absolutamente o *continuum*, e a extensão contínua é apenas uma coisa ideal, consistindo em possibilidades que de modo algum tem nela partes atuais[6]. Os todos intelectuais não têm partes, a não ser em potência. Assim, a linha reta não tem partes atuais, exceto na medida em que ela seja atualmente subdivida ao infinito; mas, se existisse uma outra ordem das coisas, os fenômenos fariam com que ela fosse subdividida de outro modo. É como a unidade na Aritmética, que é também um

---

aparece na esclarecedora carta de 31/10/1705 que endereça à princesa Sofia Carlota (1668-1705), a qual também traduzimos e se encontra no site: www.leibnizbrasil.pro.br

[5] Leibniz parece estar enganado quanto a isso, pois não conseguimos encontrar essa afirmação na **Teodiceia**; de qualquer modo, trata-se de afirmação que ele já havia feito, dentre outras, em sua correspondência com Arnauld; na carta à princesa Sofia que já mencionamos, ele afirmava: "Pode-se, então, concluir que uma massa não é uma substância verdadeiramente, que sua unidade não é senão ideal, e que (se considerarmos o entendimento) não é senão um *aggregatum*, uma multiplicidade de uma infinidade de verdadeiras substâncias, um fenômeno (*un phénomène bien fondé*), jamais fornecendo um desmentido às regras da matemática pura, mas sempre contendo algo além". (G. W. LEIBNIZ, **Discours de Métaphysique, Monadologie et autres textes**, França: Gallimard, 2004, p. 361, grifo nosso).

[6] Leibniz já havia afirmado que: "Pois o espaço é contínuo (*continuum*), mas ideal, [enquanto] a Massa é discreta, pois é uma multiplicidade atual (*multitudo actualis*), ou Ser por agregação; mas [que o é] a partir das unidades infinitas. Naquelas [coisas] que são atuais os simples são anteriores aos agregados, naquelas [coisas] que são ideais o todo é anterior à parte. Aqueles que negligenciam essas considerações dão origem ao labirinto do contínuo (*continuum labyrinthum*) [*Nempe spatium est continuum quoddam, sed ideale, Massa est discretum, nempe multitudo actualis, seu Ens per aggregationem, sed ex unitatibus infinitis. In actualibus simplicia sunt anteriora aggregatis, in idealibus totum est prius parte. Hujus considerationis neglectus illum continuum labyrinthum peperit*]". (**GP**, volume II, 1960, p. 379). Cf. p. 162 da obra **L'être et la relation** de FRÉMONT, C., Paris: Vrin, 1999.

todo intelectual ou ideal divisível em partes; como em frações, por exemplo, não atualmente em si (de outro modo, ela seria redutível a partes mínimas que jamais se encontram em números), mas na medida em que tiver frações determinadas[7]. Eu afirmo, então, que a matéria – que é algo de atual – não resulta senão das mônadas, isso é, das substâncias simples indivisíveis, mas que de nenhum modo a extensão ou a grandeza geométrica é composta das partes possíveis que somente aí se pode designar (*assigner*), nem se resolve em pontos, e que os pontos também são apenas extremidades e de nenhum modo partes ou aquilo que compõe a linha.

II. Quanto ao cálculo dos Infinitesimais, não estou totalmente satisfeito com as expressões do senhor *Hermann* em sua resposta ao senhor *Nieuwentyt*, nem com as dos nossos outros amigos. E o Sr. *Naudé* tem razão em se opor a isto. Quando, na França, eles polemizavam com o abade *Gallois*, o padre *Gouye*[8] e outros, manifestei-lhe que de modo algum acreditava na existência de grandezas verdadeiramente infinitas, nem verdadeiramente infinitesimais, que [, para mim, elas] eram apenas ficções, mas ficções úteis para abreviar e para falar universalmente, como as raízes imaginárias na Álgebra[9], tais como **√-1**; que é preciso

[7] Na **Teodiceia**, Leibniz afirmava: "Parece que o Sr. Descartes também confessa em uma passagem dos seus **Princípios** [**da Filosofia**] que é impossível responder às dificuldades sobre a divisão da matéria ao infinito, o que, no entanto, ele reconhece como verdadeiro. [Rodriguez de] Arriaga e outros escolásticos fizeram quase a mesma confissão; mas se eles tivessem o trabalho de dar às objeções a forma que elas devem ter, eles veriam que há falhas na conseqüência, e algumas vezes falsas suposições que confundem. Eis um exemplo disso: um hábil homem um dia me fez esta objeção: seja seccionada a linha reta B A em duas partes iguais pelo ponto C, e a parte C A pelo ponto D, e a parte D A pelo ponto E, e assim ao infinito; todas as metades B C, C D, D E etc., fazem juntas o todo B A; então, é preciso que haja uma última metade, pois a linha reta B A termina em A. Mas, a existência desta metade última é absurda; pois uma vez que ela é uma linha, ainda poderemos seccioná-la em duas. Logo, a divisão ao infinito não poderia ser admitida. Mas, eu o fiz observar que não se tem direito de inferir que seja preciso a existência de uma metade última, embora exista um último ponto A, pois este último ponto convém a todas as metades de seu lado. E meu próprio amigo reconheceu, quando ele se empenhou em provar esta inferência por meio de um argumento em forma, que ao contrário, pelo próprio fato de a divisão ir ao infinito, não há metade última alguma. E embora a linha reta A B seja finita, não resulta que a divisão que fizemos tenha um último termo. Ficamos embaraçados, da mesma maneira, nas séries dos números que vão ao infinito. Concebe-se um último termo, um número infinito ou infinitamente pequeno; mas tudo isso não passa de ficção. Todo número é finito e passível de especificação (*assignable*), toda linha também o é, e os infinitos ou infinitamente pequenos significam apenas grandezas que se pode tomar [por] tão grandes ou tão pequenas quanto se queira, para mostrar que um erro é menor do que o que foi especificado (*a assignée*), isso é, que não há erro algum; ou bem se entende pelo infinitamente pequeno o estado de desaparecimento ou aparecimento de uma grandeza, pensados a partir da imitação das grandezas já formadas" (tradução nossa). LEIBNIZ, G. W. **Essais de Theódicée**. Paris: Flammarion, 1969, [Discurso sobre a fé com a razão, § 70] pp. 91-2.

[8] Leibniz se refere a Philippe Naudé (1654-1729), para quem ele já tinha escrito uma carta em 29 de dezembro de 1707, a Jakob Hermann (1678-1733), Bernard Nieuwentijt (1654-1727), Thomas S. J. Gouye (1650-1725) e Jean Gallois (1632-1707).

[9] Em outros textos, Leibniz afirmava: "O cálculo infinitesimal é útil quando se trata de aplicar a matemática à física, ainda que eu não pretenda empregá-lo para dar conta da natureza das coisas. Pois considero as quantidades infinitesimais como ficções úteis" (LEIBNIZ, **Escritos filosóficos** [Olaso, *A última resposta*], 1982, p. 633); e "esse todos infinitos [como o espaço absoluto], bem como os seus opostos infinitamente pequenos [como os átomos], são de atualidade apenas nos cálculos geométricos, da mesma forma que as raízes imaginárias da álgebra" (LEIBNIZ, **Novos ensaios** [livro II, cap. XVII, § 3], 1984, p. 110). Para essa parte de sua argumentação, incluindo a questão da universalidade do cálculo e da transcendência de determinadas curvas,

conceber, por exemplo, (1) o diâmetro de um pequeno elemento de um grão de areia, (2) o diâmetro do próprio grão de areia, (3) o do globo da Terra, (4) a distância de uma [estrela] fixa com relação a nós, (5) a grandeza de todo o sistema das [estrelas] fixas, como (1) uma diferencial do segundo grau, (2) uma diferencial do primeiro grau, (3) uma linha ordinal que se pode assinalar, (4) uma linha infinita, (5) uma linha infinitamente infinita. E quanto mais se fazia grande a proporção ou o intervalo entre estes graus, tanto mais se aproximava da exatidão, e mais se podia diminuir o erro e mesmo eliminá-lo de uma só vez por meio da ficção de um intervalo infinito, que sempre podia ser realizado ao modo de *Arquimedes*; mas, como o marquês Sr. de *l'Hôpital*[10] acreditava que por [defender] isso eu traia a causa, eles me pediram que não dissesse nada sobre isso além daquilo que eu dissera em uma passagem das Atas de Leipzig, e foi fácil para mim atender ao seu pedido.

III. Para enfim chegar ao $0/\infty$, ou seja, zero dividido pelo infinito, e coisas semelhantes, eu digo que isso também não pode ocorrer [de fato] a não ser dentro de uma interpretação adequada, tomando o zero como um número extremamente pequeno, e o infinito como um número muito grande. Acontece que, quanto mais se diminui o numerador, e mais se aumenta o denominador da fração em [determinada] proporção, mais se aproxima do zero. [Como é o caso em:]

$$(1:10)/10 = 1/100 \text{ e } (1:100)/100 = (1/1000) \text{ e } (1:1000)/1000 = 1/1000000$$

o que conduz a $0/\infty = 0$, ou $(1/\infty)/\infty = 0$, ou $1/(\infty\times\infty)$, de modo que o quadrado do infinito multiplicado pelo zero resultaria na unidade. Mas pode-se dizer que aquilo conduz a isto, mas não que resulta nisto[11]; entretanto, rigorosamente *nihilum*, que é a extremidade decrescente dos números, deveria então ser dividido por *omnia*, que é a extremidade crescente dos

conferir o nosso artigo: "Leibniz e Descartes: Labirintos e análise", **Cadernos Espinosanos**, n. 11, pp. 123-169; valeria a pena também dar uma lida no nosso artigo: "Matemática e metafísica em Leibniz: o cálculo diferencial e integral e o processo psíquico-metafísico da percepção", **Theoria: revista eletrônica de filosofia**, vol. 2, n. 5, 2010, pp 1-16.

[10] Leibniz menciona o grego Arquimedes (287-212 a.C.), certamente fazendo lembrar o método de exaustão; em seguida se refere a Guillaume François Antoine L'Hôpital(1661-1704), mais conhecido como marquês de L'Hôpital; não conseguimos saber se o pedido a que ele se refere está registrado em alguma carta e a qual texto das Atas de Leipzig ele se refere exatamente, já que publicou nelas muitas vezes.

[11] Evidentemente, se a) $(1/\infty)/\infty = 0$, então b) $1/(\infty\times\infty) = 0$, daí que c) $1 = 0 \times (\infty\times\infty)$, ou seja, que o quadrado do infinito multiplicado por zero é igual à unidade; exatamente aqui surge o vício de raciocínio (paralogismo) que Leibniz está tentando explicitar, pois a) *conduz* a c) passando por b), mas, rigorosamente falando, não se trata de um *resultado* de fato, pois não existe um número de fato infinitamente grande (*omnia*) nem um número de fato infinitamente pequeno (*nihilum*); trata-se, portanto, de um vício de raciocínio associado ao próprio conceito de número em sua relação com o de unidades. Daí que a tradução da expressão latina *extremitates exclusae non inclusae* possa ser *extremos excluídos, não permitidos*; que significa que de fato não podem existir números de uma extremidade última, seja para maior seja para menor; aqui não é só o número (símbolo) infinito que gera o vício de raciocínio, mas também a própria noção do zero entendido como um número que representa o nada, no sentido de limite do menor.

números. Mas, considerada como *numerus maximus*, *omnia* é uma coisa contraditória, assim [como *nihilum* considerado] como *numerus minimus.* As duas extremidades *nihil* & *omnia* estão fora dos números, [ou seja, são] *extremitates exclusae non inclusae.*

IV. É fácil cair nos paralogismos[12] quando estas coisas não são reformuladas a partir das ideias que acabo de fornecer. Um hábil matemático de Pisa, de nome *Guido Grandi*, tinha sustentado que uma infinidade de nadas ou zeros colocados juntos constituíam uma grandeza assinalável e, assim, com uma elegante alegoria, ilustrava a produção de criaturas a partir do nada por meio do l'infinito. O Sr. *Alessandro Marchetti*[13], outro hábil matemático de Pisa, se opôs a isso, dizendo que uma infinidade de nadas jamais faria outra coisa a não ser nada. E, assumindo o nada rigorosamente, ele tinha razão. No entanto, o padre *Grandi* provava a proposição pela divisão: o senhor sabe que ao dividir $\mathbf{1/(1+ a)}$ ou $\mathbf{1:(1+a)} = \mathbf{1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5}$ e assim ao infinito. Logo, se [assumimos que] **a** é **1**, somos conduzidos a $\mathbf{1/(1+1) = 1:2 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1}$ e assim ao infinito, o que constituirá $\mathbf{1/2= 0 + 0 + 0 + 0 + 0}$ etc. Eu fui consultado a esse respeito e eis como acredito ter decifrado o enigma. Não é necessário dizer que uma infinidade de nadas considerados rigorosamente constituem alguma coisa, de tal maneira que esta série não se refere a nada, ainda que ela pareça se referir. Para compreender isso de modo adequado, é preciso resolvê-la em séries finitas próximas do infinito. Seja então a série $\mathbf{1 - 1 + 1 - 1}$ etc. finita, se em tal caso você considera um número impar de 7 unidades, por exemplo $\mathbf{1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1}$, o todo faz **1**. Acontece que, quando isso termina no infinito, onde não existe nem par nem impar, é preciso considerar o meio aritmético entre **1** e **0** que é **1/2**; pois nas estimativas ambíguas, quando não há mais razão para um que para outro, é preciso considerar o meio. Entre **1** e **m**, por exemplo, é preciso considerar **(1+m)/2**, isto é, [se assumimos que **m** é igual a 0, então temos] **(0+1)/2**, isto é **1/2**.

V. Eu me empenhei para explicar [tudo isso] e espero ter conseguido o suficientemente, tendo em vista que se trata de uma pessoa que possui a sua perspicácia; mas, quanto às dificuldades que [ainda] podem [restar] em uma matéria tão difícil quanto essa de que se trata,

[12] Quanto à menção de Leibniz ao problema dos paralogismos em demonstrações matemáticas, conferir as páginas 151 a 154 do nosso artigo *Leibniz e Descartes: Labirintos e análise*, op. cit.
[13] O italiano Alessandro Marchetti (1633-1714), nascido em Empoli e professor da Universidade de Pisa – cidade onde morre no mesmo ano em que o monge italiano Luigi Guido Grandi (1671-1742), nascido em Cremona, se torna professor de matemática na mesma universidade – reagiu contra as ideias deste. Grandi parece ter sido um importante divulgador das ideias de Leibniz sobre o cálculo infinitesimal e o infinito na Itália; segundo o que é afirmado aqui, a principal oposição se referia à impossibilidade que do nada possa surgir algo, associada ao fato que a série mencionada, que levou o nome de Grandi, parece fazer surgir unidades ou mesmo o infinito a partir de determinadas frações que, quando tomadas em determinadas partes, ora totalizam “algo”, ora totalizam “nada”.

eu me empenharei em resolvê-la, e este será o meio de esclarecer a verdade. No mais, com zelo e estima.

Hanôver, 11 de setembro de 1716.